

PROVA MODELO DE MATEMÁTICA

Duração: 120 minutos

A PROVA É CONSTITUÍDA POR **4 GRUPOS (I, II, III e IV)** E CADA GRUPO É CONSTITUÍDO POR DUAS QUESTÕES (1.1, 1.2, ...). DEVE RESPONDER APENAS A **UMA QUESTÃO DE CADA GRUPO** E DEVE IDENTIFICAR DE FORMA CLARA E UNÍVOCA AS QUESTÕES QUE ESCOLHEU PARA RESPONDER. A COTAÇÃO PARA TODAS AS QUESTÕES É DE 5 VALORES. JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS E EXPLICITE **TODOS OS CÁLCULOS** QUE EFETUAR. QUALQUER TENTATIVA DE FRAUDE QUE SEJA DETETADA RESULTARÁ NA ANULAÇÃO DA PROVA

I

1.1. Seja A o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $\frac{x-9}{2} + 5 \geq x^2$. Sabe-se que $A \cap B =]0,1]$.

Qual dos conjuntos seguintes poderá ser o conjunto B ? Justifique.

(A) $]0,2]$

(B) $] -1,1[$

(C) $\mathbb{R}^-$

(D) $\mathbb{Z}$

1.2. Considere três números naturais diferentes, dos quais 1 é o menor. Sabe-se que o valor exato da média aritmética desses três números é 3 e que o seu produto é 15. Quais são os dois números naturais que satisfazem estas condições?

II

2.1. Na Figura 1 está representada, num referencial ortonormado xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $-2, 2$ e 5 são zeros de f
- f' representa a derivada de f

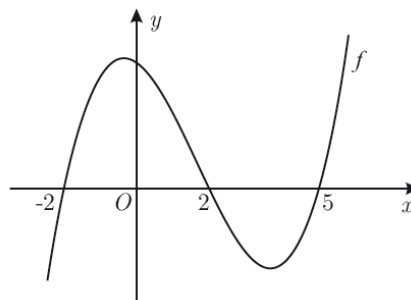


Figura 1

Indique, justificando, qual das afirmações seguintes é verdadeira:

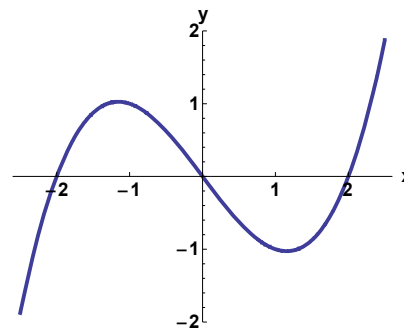
(A) $f'(6) < 0$

(B) $f'(1) > 0$

(C) $f'(1) \times f'(6) > 0$

(D) $f'(-3) \times f'(6) > 0$

2.2. Na Figura 2 está representada, num referencial ortonormado xOy , parte do gráfico de uma função polinomial $f(x)$ do 3º grau. Sendo $g(x) = x f(x-2)$, indique, justificando o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações:



- (A) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- (B) Se $x \in]-2, 0[$, então $g(x) > 0$
- (C) A função g tem mais zeros que a função f

Figura 2

III

3.1. Qual é o conjunto solução da seguinte inequação $8^{5x^2-43} - 64 > 0$.

3.2. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = \frac{1}{2}$. Qual é, para esses valores de a e de b , o valor de $\log_a (\sqrt{a} \times b^3)$. Justifique.

- (A) 8
- (B) 6
- (C) 2
- (D) -2

IV

4.1. Queremos colocar 6 bolas indistinguíveis em 4 caixas distintas, de forma que cada caixa contenha pelo menos uma bola. De quantas maneiras diferentes podem as bolas ficar colocadas nas caixas?

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 10
- (D) 12

4.2. No lançamento de dois dados equilibrados ao ar, qual a probabilidade de o total de pontos ser igual a 10?

- (A) $\frac{1}{10}$
- (B) $\frac{1}{12}$
- (C) $\frac{1}{6}$
- (D) $\frac{2}{23}$

FORMULÁRIO:

Retas

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Fórmula Resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Análise Combinatória

$${}^nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad {}^nA_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Binómio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

Probabilidades

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) \neq 0 \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Propriedades de potências e de radicais: Para $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{ com } a \neq 0 \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}} \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Logaritmos e propriedades dos logaritmos: Para $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $k \in \mathbb{R}$,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y, \text{ com } x > 0 \quad \log_a(a^x) = x \quad a^{\log_a x} = x \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \log_a(x^k) = k \log_a x$$

Regras de derivação:

$$\begin{aligned} c' &= 0 & x' &= 1 \\ (cf)' &= cf' & (f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (f \cdot g)' &= f'g + fg' & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ (f^p)' &= pf^{p-1}f', \quad p \in \mathbb{Q} & (\sqrt[n]{f})' &= \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N} \\ (e^f)' &= f'e^f & (a^f)' &= f'a^f \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+ \\ (\ln f)' &= \frac{f'}{f} & (\log_a f)' &= \frac{f'}{f \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ (f^g)' &= g'f^g \ln f + g f^{g-1} f' \end{aligned}$$